УДК 681.536.5

Толстых В.К. – д.ф.-м.н., проф., Донецкий национальный университет (ДонНУ)
Недопекин Ф.В. – д.т.н., проф., ДонНУ
Бодряга В.Е. – зав. компьютерной лабораторией, ДонНУ

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В ВИДЕ ПОЛИНОМОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Решается задача идентификации эффективного коэффициента температуропроводности $a(T)$ при непрерывной разливке металла. Коэффициент температуропроводности представлялся алгебраическими полиномами, зависящими от температуры T двумя способами: традиционным полиномом и полиномом с весовым коэффициентом. Коэффициенты полинома образуют вектор, который необходимо идентифицировать. Для решения задачи в экстремальной постановке использовался прямой экстремальный подход. Минимизация осуществлялась методом сопряженных градиентов. Обосновывается невозможность решения задач в данной постановке с использованием традиционного полинома.

Ключевые слова: идентификация, эффективный коэффициент, непрерывное литье, температуропроводность, минимизация.

Введение

При моделировании теплофизических процессов зачастую приходится идентифицировать параметры модели, зависящие от температуры процесса [1 – 3, 5, 6, 8, 9]. При решении таких обратных задач, обычно, искомые параметры представляют в виде алгебраических полиномов, зависящих от температуры. Задача моделирования сводится к идентификации коэффициентов этих полиномов [2 – 7, 9].

К сожалению, в большинстве публикаций подобные задачи не доводятся до практических численных решений. Как правило, отсутствуют тестовые расчеты, демонстрирующие достоверность и точность восстановления коэффициентов полиномов, отсутствуют исследования влияния степени полиномов на результаты моделирования.

Постановка задачи

В данной работе рассматривается задача идентификации теплофизических параметров в непрерывном стальном слитке [4 -7, 9]. Искомые параметры зависят от температуры слитка. Рассматривается установившийся процесс охлаждения цилиндрического слитка в вертикальной машине непрерывного литья. Область принудительного охлаждения слитка состоит из короткой первичной зони (кристаллизатор) и зоны вторичного охлаждения (ЗВО). Известно, что качественная идентификация моделей позволяет использовать упрощённые модели процессов. Поэтому, в данной постановке мы не учитывали гидродинамику и ряд теплофизических характеристик слитка. Все это корректировалось идентифицируемым эффективным коэффициентом температуропроводности [4, 5]:

$$V\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(ra\frac{\partial T}{\partial r}\right), \quad (r,z)\in\Sigma=[0,R]\times[0,Z], \tag{1}$$

$$T\Big|_{\substack{0\le r\le R\\ z=0}}=T_0,\quad \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{\substack{r=0\\ 0<z<Z}}=0,\quad T\Big|_{\substack{r=R\\ 0\le z\le z_C}}=T_C,\quad a\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{\substack{r=R\\ z_C<z\le Z}}=-\alpha'\left(T-T_h\right),$$

где V – скорость литья, м/мин; T – температура слитка, К; a – эффективный коэффициент температуропроводности, м^2/сек; r – эффективный радиус слитка, м; z – общая длина охлаждения слитка, м; T_C – температура слитка в кристаллизаторе, К; T_0 – температура заливаемого в установку металла, К; z_c – нижняя граница кристаллизатора, м; T_h – температура охладителя в ЗВО, К; $\alpha'=\alpha/c\rho$, α – коэффициент теплоотдачи в ЗВО, кВт/(м^{2}К), c – теплоемкость, Дж/(кг К); ρ - плотность, кг/м^3.

В данной статье предполагается, что все параметры модели (1), за исключением температуропроводности, заданы точно, т.е. все упрощения и погрешности модели учитываются эффективной температуропроводностью $a(T)$. Для идентификации $a(T)$ будем представлять эту зависимость различными алгебраическими полиномами, относительно температуры T. Коэффициенты полинома образуют вектор $\mathbf{c}=\{c_0,c_1,...,c_n\}$ размерности $n+1$. При этом задача идентификации модели (1) сводится к задаче параметрической идентификации вектора **c**.

Качество идентификации будем оценивать следующим критерием по всей области охлаждения цилиндрического слитка:

$$J(\mathbf{c})=\int_0^R\int_0^Z\left[T(r,z)-T_e(r,z)\right]^2 2\pi r dz dr\to\min, \tag{2}$$

где T_e – экспериментально измеренная температура.

Для решения задачи идентификации используется прямой экстремальный подход [8, 11], который позволяет различными экстремальными методами находить оптимальные параметры, доставляющие минимум целевым функционалам. В рассматриваемой задаче критерий качества (2) является функцией размерности $n+1$, что существенно упрощает построение экстремальных алгоритмов её минимизации. Минимизация $J(\mathbf{c})$ осуществляется методом сопряженных градиентов:

$$\mathbf{c}^{k+1} = \mathbf{c}^k - b^k p^k, \qquad k = 0,1,... \tag{3}$$

где $p^k = \nabla J^k + \dfrac{\left\|\nabla J^k\right\|^2}{\left\|\nabla J^{k-1}\right\|^2} p^{k-1}$, $p^0 = \nabla J^k$, ∇J^k – градиент критерия качества идентификации (2) на итерации k. Шаг минимизации b^k рассчитывается с использованием метода Вульфа [10].

Для расчета компонент градиента ∇J в ($n+1$)-мерном пространстве будем использовать конечно-разностную схему [10]:

$$\nabla_i J\left(\mathbf{c}^k\right) \approx \frac{J\left(\mathbf{c}^k + he_i\right) - J\left(\mathbf{c}^k\right)}{h}, \; i = 0,1,..,n, \tag{4}$$

где число $h = 10^{-13}\left\|\mathbf{c}\right\|$, e_i – единичный вектор вдоль оси i в пространстве оптимизируемых параметров c_i.

Алгоритм тестирования

Используя описанную математическую модель и экстремальный подход к задаче идентификации, проводили следующий вычислительный эксперимент. Задавалось некоторое значение $\mathbf{c}_e$ искомого вектора, которое далее считалось «точным». Для него по модели (1) рассчитывалось поле температур, которое считалось экспериментальным T_e. После чего приступали к решению задачи восстановления (идентификации) вектора $\mathbf{c}_e$ на основе T_e методом (3) из какого-либо начального приближения $\mathbf{c}^0$. Условием завершения итераций, являлось изменение критерия качества менее, чем на 0,1 %.

Найденное значение $\mathbf{c}^k$ сравнивалось с $\mathbf{c}_e$ по формуле $\Delta^k = \left\|\mathbf{c}^k - \mathbf{c}_e\right\|$. По величине погрешности Δ^k можно сделать объективный вывод о качестве идентификации. Отметим, что существенное уменьшение критерия $J(\mathbf{c})$ не может служить критерием близости к решению $\mathbf{c}_e$.

Идентификация традиционным полиномом

Рассмотрим традиционное представление искомой функции в виде следующего полинома:

$$a \equiv a(T) = \sum_{i=0}^{n} c_i T^i . \tag{5}$$

Для тестирования задачи идентификации с данным полиномом задавались следующие значения тестовых параметров. Экстремальные приближения $\mathbf{c}_e$ задавались из физических соображений, а именно, – из наличия трех фаз в охлаждаемом слитке. Были подобраны следующие значения:

$$c_{e0} = 3 \cdot 10^{-6}, c_{e1} = 1 \cdot 10^{-9}, c_{e2} = 1 \cdot 10^{-13}, c_{e3} = 1 \cdot 10^{-17}, c_{e4} = 1 \cdot 10^{-19}$$

и начальные:

$$c_{e0}^0 = 4{,}5 \cdot 10^{-6}, c_{e1}^0 = 3 \cdot 10^{-9}, c_{e2}^0 = 7 \cdot 10^{-13}, c_{e3}^0 = 4 \cdot 10^{-17}, c_{e4}^0 = 1{,}1 \cdot 10^{-19}.$$

Результаты идентификации модели (1), (5) для разных степеней полинома (5) представлены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты восстановления коэффициентов полиномов вида $a(T) = \sum_{i=0}^{n} c_i T^i$

n	0	1	2	3	4
Δ^0	$1{,}500 \cdot 10^{-6}$	$1{,}500 \cdot 10^{-6}$	$1{,}500 \cdot 10^{-6}$	$1{,}500 \cdot 10^{-6}$	$1{,}500 \cdot 10^{-6}$
Δ^k	$4{,}709 \cdot 10^{-14}$	$1{,}500 \cdot 10^{-6}$	$1{,}500 \cdot 10^{-6}$	$1{,}500 \cdot 10^{-6}$	$1{,}500 \cdot 10^{-6}$
J^k / J^0	$1{,}203 \cdot 10^{-15}$	$2{,}030 \cdot 10^{-4}$	$2{,}113 \cdot 10^{-3}$	$7{,}953 \cdot 10^{-3}$	$1{,}536 \cdot 10^{-2}$
k	4	3	4	4	5

Из табл. 1 видно, что решение задачи (1) – (5) реализуется только при $n = 0$. Во всех остальных случаях удавалось приблизительно восстановить только одну последнюю компоненту вектора $\mathbf{c}$, то есть c_n. Все предыдущие c_i, где $0 \le i < n$, практически не менялись. Это объясняется наибольшим влиянием последнего члена ряда $c_n T^n$ на состояние системы (1). Очевидно, что для данной постановки задачи возможно преодолеть неравномерное восстановление $c_i T^i$ только при $T \approx 1$.

Можно сделать вывод, что задача (1) – (4) с традиционным полиномом (5) в общем случае для произвольных n и T не имеет решения. Заметим, что существенное уменьшение целевой функции $J(\mathbf{c})$ (см. табл. 1) не является критерием близости к точному решению.

Идентификация полиномом с весовыми коэффициентами

Рассмотрим коэффициент температуропроводности в виде следующей полиномиальной зависимости:

$$a \equiv a(T) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{T_c^i} c_i T^i \,, \tag{6}$$

где $\frac{1}{T_c^i}$ – коэффициент масштабирования, T_c – характерная температура процесса. В нашем случае она принималась равной температуре затвердевания, т.е. $T_c = T_{sol}$. В данной постановке задавались $\mathbf{c}_e = 2 \cdot 10^{-6}$, $i = 0,..,n$, $\mathbf{c}_i^0 = 6 \cdot 10^{-6}$, $i = 0,..,n$.

Результаты идентификации модели (1), (6) для разных степеней полинома (6) представлены в таблице 2. Из результатов расчетов видно, что для всех степеней полиномов их коэффициенты хорошо восстанавливаются, вектор $\mathbf{c}^k$ приближается к точному значению $\mathbf{c}_e$. В то же время, чем выше степень полинома, тем хуже и медленнее восстанавливается вектор $\mathbf{c}$. В любом случае наблюдается значительное уменьшение критерия качества идентификации, по сравнению с предыдущим подходом.

Таблица 2

Результаты восстановления коэффициентов полиномов вида $a(T) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{T_c^i} c_i T^i$

n	0	1	2	3	4
Δ^0	$4{,}000 \cdot 10^{-6}$	$5{,}657 \cdot 10^{-6}$	$6{,}928 \cdot 10^{-6}$	$8{,}000 \cdot 10^{-6}$	$8{,}944 \cdot 10^{-6}$
Δ^k	$4{,}256 \cdot 10^{-15}$	$4{,}126 \cdot 10^{-12}$	$2{,}560 \cdot 10^{-10}$	$6{,}766 \cdot 10^{-10}$	$1{,}340 \cdot 10^{-9}$
J^k / J^0	$2{,}235 \cdot 10^{-18}$	$4{,}883 \cdot 10^{-16}$	$1{,}727 \cdot 10^{-15}$	$9{,}277 \cdot 10^{-15}$	$7{,}556 \cdot 10^{-14}$
k	5	16	19	26	17

Исследование влияния степени полинома

Остается открытым вопрос: какова должна быть степень полинома (6), чтобы идентифицировать модель (1) с достаточной точностью? Очевидно, что степень полинома зависит от поведения реального объекта, т.е. от T_e, и реальное значение n может быть выбрано только из физических соображений и ряда вычислений экспериментов с разными n.

Рассмотрим влияние степени $n = 0,..,4$ в полиноме (6) на решение задачи идентификации (1), (2), где «реальному процессу» будет соответствовать $n = 2$, то есть решим задачи восстановления квадратичного полинома полиномами разных степеней.

Из табл. 3 видно, что при увеличении степени восстанавливающего полинома эффективность идентификации заметно ухудшается.

Таблица 3

Результаты восстановления коэффициентов полинома $a(T) = \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{T_c^i} c_i T^i$ для разных степеней $n = 0,..,4$

n	0	1	2	3	4
J^k	$6,299 \cdot 10^1$	$1,369 \cdot 10^{-2}$	$1,779 \cdot 10^{-10}$	$1,611 \cdot 10^{-2}$	$2,360 \cdot 10^{-2}$
k	4	8	19	13	11

Наилучший результат $J^k = 1,779 \cdot 10^{-10}$ получен при $n = 2$, то есть когда степень восстанавливающего полинома соответствует степени полинома «реального процесса».

Выводы

Идентификация теплофизических параметров традиционными полиномами вида (5), в общем случае невозможна. В тоже время, полином вида (6) позволяет решать задачи идентификации теплофизических параметров с высокой точностью.

Показано, что увеличение степени полинома не означает увеличение точности идентификации модели. Каждая конкретная прикладная задача требует индивидуального подбора степени полинома, аппроксимирующего искомые теплофизические параметры.

Список литературы

1. Алифанов О. М. Экстремальные методы решения некорректных задач / Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. – М. : Наука, 1988. – 288 с.

2. Артюхин Е. А. Определение коэффициента температуропроводности по данным эксперимента / Артюхин Е. А. Инженерно-физический журнал. – 1975. – Т. XXIX. – № 1. – С. 87–90.

3. Мацевитый Ю. М. Гибридное моделирование тепловых процессов / Мацевитый Ю. М., Кунеш Й. – К. : Наукова думка, 1987. – 268 с.

4. Международный форум по тепло- и массообмену: тезисы докладов и сообщений, 19-23 мая 2008 г., Минск. Т. 2 / отв. За выпуск Т. Г. Михалёва. – Минск: Институт по тепло- и массообмену им. А. В. Лыкова НАН Беларуси, 2008. – С. 336–338

5. Национальная конференция по металлургии: сб. трудов конф., 28-31 мая 2007 г., София / Под ред. А. Аврамов, Я. Лукарски. – Болгария, София: Международный дом ученых «Фредерик Жолио-Кюри», 2007. – 330 с.

6. Недопекин Ф. В. Математическое моделирование гидродинамики и тепломассопереноса в слитках / Федор Викторович Недопекин. – Ижевск: Изд-во Удмурдского университета, 1995. – 236 с.

7. Прямая оптимизация теплофизических процессов/ [Огурцов А. П., Недопекин Ф. В., Толстых В. К., Володин Н. А.]. – Донецк : Юго-Восток, 1997. - 150 с.

8. Толстых В.К. Прямой экстремальный подход для оптимизации систем с распределенными параметрами / Виктор Константинович Толстых. - Донецк: Юго-Восток, 1997. - 178 с.

9. Швачич Г. Г. Определение теплофизических свойств материалов на основе решений коэффициентных ОЗТ в экстремальной постановке / Швачич Г. Г., Шмукин А. А. // Теория и практика металлургии. – 2005. - № 1–2. – С. 104–108.

10. Jorge Nocedal Numerical Optimization / Jorge Nocedal, Stephan J. Wright. - Springer, 1999.- 636 p.

11. Tolstykh V.K. Efficient Method of Optimization of Physical Processes // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2003. - Vol. 76. - № 2. - P. 424 – 427.

Рукопись поступила 07.09.2009 г.